Απ. 1. No. Date 13/12/17

<u>Σχόλια Άσκησης</u>: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\infty} f = l_+ \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο. f φραγμένη

Αν $a_n \to l \in \mathbb{R}$ ⇝ (a_n) φραγμένη

Αν $\lim_{x\to c} f = l \in \mathbb{R}$ ⇝ f φραγμένη σε γειτονιά του c

Αν $\lim_{x\to+\infty} f = l_+ \in \mathbb{R}$ ⇝ f φραγμένη "σε γειτονιά του $+\infty$"

δηλ. $|f(x)| \le L_+$ $x \ge M$.

$\forall \epsilon>0 \ \exists M>0$ τ.ω. $|f(x)+l_+|<\epsilon \ \forall x>M$ $\begin{pmatrix} x\to-\infty \\ x<-M \end{pmatrix}$

Για $\epsilon=10$ ⇝ $\exists M>0$ τ.ω. $|f(x)-l_1|<10 \ \forall x>M$

$|f(x)| < \underbrace{10+|l_+|}_{L_+} \ \forall x>M$

Ομοίως $|f(x)|<L_-$ $x<-M'$

Θέτουμε $L=\max\{L_-, L_+\}$ $K=2\max\{M', M\}$

Δείξαμε $|f| \le L$ αν $|x| \ge K$

Απομένει ν.δ.ο. f φραγμένη στο $[-K,K]$

Αφού f συνεχής σε φρ. και κλειστό διάστημα

⇝ f φραγμένη στο $[-K,K]$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ (διάστημα) και $c \in I$. Έστω επίσης $f: I \to \mathbb{R}$ $g: I\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμες στο c. Τότε αν $a\in\mathbb{R}$

① Εάν $a\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση af είναι διαφορ. στο c και $(af)'(c) = af'(c)$

No. Date

(ii) Η συνάρτηση $f+g$ είναι διαφορ. στο c και $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

(iii) >> $f \cdot g$ >> $(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(iv) Αν $g(c) \neq 0$ >> $\frac{f}{g}$ >> $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$

Σχόλιο: • Αν έχω $(f+g+h)'(c) = f'(c) - g'(c) + h'(c)$

Αν έχω $(f \cdot g \cdot h)'(c) = f'(c) \cdot g(c)h(c) + f(c)g'(c)h(c) + f(c)g(c)h'(c)$

Απόδειξη (iii)

Θέτουμε $p = f \cdot g$. Τότε για $x \in I$ $x \neq c$ έχουμε

$$\frac{p(x)-p(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)-f(c)}{x-c} g(x) + f(c) \cdot \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

Αφού g συνεχής στο c $\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$

Άρα, αφού $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ $\lim_{x \to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = g'(c)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{p(x)-p(c)}{x-c} = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

No. Date

Απόδειξη (iv)

Θέτουμε $q = \frac{f}{g}$. Αφού g διαφ. στο c, είναι και συνεχής στο c. Άρα αφού $g(c) \neq 0$, $\exists$ διάστημα $J \subseteq I$ με $c \in J$ τ.ω. $g(x) \neq 0$ $\forall x \in J$. Για $x \in J$, $x \neq c$, έχουμε

$$\frac{q(x)-q(c)}{x-c} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{x-c} = \frac{f(x)\cdot g(c) - f(c)\,g(x)}{g(x)\,g(c)\,(x-c)} =$$

$$= \frac{f(x)g(c) - f(c)g(c) + f(c)g(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(c)}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\,g(c) - f(c)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$

Χρησιμοποιούμε τη συνέχεια της g στο c και τη διαφορισιμότητα των f,g στο c

$$q'(c) = \lim_{x\to c}\frac{q(x)-q(c)}{x-c} = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

Θ. Καραθεωδορή

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ (I διάστ.) $c \in I$. Τότε f διαφορ. στο c αν και μόνο αν $\exists\, \phi: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο c τ.ω.

$$f(x) - f(c) = \phi(x)(x-c) \quad \forall x \in I \quad (*)$$

Σε αυτήν την περίπτωση $\phi(c) = f'(c)$

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Εάν $f'(c)$ $\exists$, ορίζουμε

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{για } x \neq c \text{ , } x \in I \\ f'(c) & \text{για } x = c \end{cases}$$

Η ϕ είναι συνεχής στο c αφού

$$\lim_{x \to c} \phi(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \phi(c)$$

Επιπλέον έχουμε ότι η ⊛ ισχύει για $x \neq c$
Προφανώς ⊛ ισχύει και για $x = c$
Άρα ⊛ ισχύει (για $x \in I$)

Υποθέτ. ότι $\exists\ \phi : I \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. (⊛) ισχύει

Άρα $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \phi(x)$, $x \neq c$, $x \in I$

Αφού ϕ συνεχής στο c: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c} \phi(x) = \phi(c)$

Δηλ. f διαφορ. στο c και $f'(c) = \phi(c)$

Παράδειγμα

$f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)-f(c) = x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x-c) = \phi(x)(x-c)$$

όπου $\phi(x) = x^2 + cx + c^2$ Αφού ϕ συνεχής στο c
θ. Καραθεοδωρή η f παραγ. στο c και $f'(c) = \phi(c) = 3c^2$

No. Date

Κανόνας αλυσίδας (Chain rule)

Εαν η f διαφ. στο c και g διαφορ. στο $f(c)$, ισχύει
$(g\circ f)'(c) = g'(f(c))\cdot f'(c)$ (Κ.αλ.)

Εστω $\lim_{x\to c} f(x) = l$ και $\lim_{y\to d} g(y) = c$

Ισχύει $\lim_{y\to d} f(g(y)) = l$ Θέτουμε $x = g(y)$
όταν $y \to d$
$x \to c$

$\lim_{y\to d} |x-c| = 0$

Για $x \neq c$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x-c} = \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x)-f(c)} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Δεν μπορώ να προχωρήσω παραπάνω.

Θέτω $y = f(x)$ όταν $x \to c$ $\rightsquigarrow$ $y \to f(c)$

$$\lim_{y\to f(c)} \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)} = g'(f(c))$$

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδα)
Εστω I, J διαστ. $g: I \to \mathbb{R}$ $f: J \to \mathbb{R}$ με $f(J) \subseteq I$
και έστω $c \in J$. Εαν η f διαφορ. στο c και g διαφορ
στο $f(c)$, τότε η σύνθεση $g\circ f$ είναι διαφορ. στο c
και $(g\circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c)$

Απόδειξη
Αφού $f'(c)$ $\exists$, από Θ. Καραθεωδορή $\Rightarrow$ $\exists$ $\phi: J \to \mathbb{R}$
συνεχής στο c τ.ω. $f(x) - f(c) = \phi(x)(x-c)$, $x \in J$ με $f'(c) = \phi(c)$

No. Date

Ομοίως, αφού $g'(f(c))$ $\exists$: $\exists$ $\psi: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $d=f(c)$ τ.ω.

$$g(y)-g(d)=\psi(y)\cdot(y-d) \quad y\in I \quad \text{με } \psi(d)=g'(d)$$

Θέτουμε $y=f(x)\in f(J)\subseteq I$, $d=f(c)$:

$$(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)=g(f(x))-g(f(c))=\psi(f(x))(f(x)-f(c))=\psi(f(x))\phi(x)(x-c)$$
$$=w(x)(x-c) \quad \forall x\in J$$

με $w(x)=\psi(f(x))\phi(x)$ είναι συνεχής στο c

Από το Θ. Καραθεοδωρή έπεται ότι η $g\circ f$ είναι παραγ. στο c. και $(g\circ f)'(c)=w(c)=\psi(f(c))\phi(c)$
$$=\psi(d)\cdot\phi(c)$$
με $\phi(c)=f'(c)$
$$=f'(c)g'(f(c))$$

Παράδειγμα

α) Αν $f: I\to\mathbb{R}$ διαφορ. στο I και $g(y)=y^n$ $y\in\mathbb{R}$
$f(I)\subseteq\mathbb{R}$ με $n\in\mathbb{N}$

Αφού $g'(y)=ny^{n-1}$

από Κ. Αλ. έχουμε $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$ $x\in I$

Άρα $(f^n)'(x)=n f(x)^{n-1} f'(x)$

Άσκηση: $f: I\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο I. Να βρεθεί $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)$
και $f\neq 0$

Να γράψω τον τύπο: $\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

Εάν $h(y)=\frac{1}{y}$ $y\neq 0$ $\rightsquigarrow$ $h'(y)=-\frac{1}{y^2}$ $y\neq 0$.